

---

# Estimation locale de fréquence par rapport de filtres

---

### 6.1 Introduction

Ce chapitre est dédié à la présentation d’une nouvelle méthode de reconstruction du module de cisaillement. Dans un paragraphe précédent (paragraphe 4.4.2), deux approches pour l’estimation du module de cisaillement à partir d’images de propagation d’ondes ont été décrites. Nous allons ici nous intéresser plus particulièrement à une autre classe de techniques appelée “estimation locale de fréquence par rapport de filtres” ou *Local Frequency Estimation* (LFE). Cette classe d’algorithmes estime la fréquence locale des données étudiées, or la fréquence spatiale locale est inversement proportionnelle à la longueur d’onde, elle-même liée au module de cisaillement.

L’approche par estimation locale de fréquence semble d’un intérêt majeur en élastographie par résonance magnétique car elle est à la base de nombreux travaux. En particulier, la Mayo Clinic qui, les premiers, ont proposé en 1995 une technique ERM et dont les compétences dans le domaine sont mondialement reconnues, ont développé et mis à disposition de la communauté internationale le logiciel MRE/Wave, qui estime le module de cisaillement à l’aide d’une technique LFE [Grimm *et al.*, 2006, Knutsson *et al.*, 1994]. Cette approche présente les avantages d’être précise et peu sensible au bruit [Manduca *et al.*, 1996, Manduca *et al.*, 2001] ce qui en fait une technique de choix pour plusieurs études cliniques [Dresner *et al.*, 1999, Kruse *et al.*, 2008, Warner *et al.*, 2009, Latta *et al.*, 2011, Serrai *et al.*, 2012]. En revanche, son application sur des transitions abruptes entre régions

aux propriétés mécaniques différentes entraîne un lissage de ces transitions. Cependant, cette approche conduit dans la majorité des cas à des images facilement interprétables et permettant de mettre clairement en évidence la présence d'un nodule.

La méthode d'estimation locale de fréquence par rapport de filtres est basée sur le filtrage du signal à analyser par deux filtres ayant des caractéristiques différentes. Le rapport de la sortie de ces deux filtres sera fonction de la fréquence locale. Cette méthode a été initialement développée par Hans Knutsson en 1994 [Knutsson *et al.*, 1994] puis a été reprise en 2001 par Jürden Braun [Braun *et al.*, 2001] en vue d'une application en ERM.

Dans ce chapitre, ces deux méthodes d'estimation locale de fréquences spatiales par rapport de filtres vont d'abord être décrites. Puis, nous présenterons en détail la méthode que nous proposons, qui estime cette fréquence spatiale via l'utilisation de filtres de Gabor. Enfin, notre algorithme sera évalué à l'aide de simulations et de données issues d'expériences sur des objets tests. Les résultats seront comparés à la vérité de terrain, lorsque celle-ci est disponible, ainsi qu'avec ceux obtenus avec les autres techniques et notamment avec la méthode LFE du logiciel MRE/Lab de la Mayo Clinic, logiciel utilisé en interne à la Mayo Clinic et auquel nous avons eu accès grâce à notre collaboration.

## 6.2 Présentation de la méthode basée sur le rapport de filtres log-normaux multiéchelle (MLFR)

Hans Knutsson a proposé en 1994 la première méthode d'estimation locale de fréquence basée sur le rapport de la sortie de filtres log-normaux multiéchelle (MLFR) [Knutsson *et al.*, 1994].

### 6.2.1 Estimation bande étroite

Considérons un signal analytique 1D localement monochromatique  $s(t)$  dont on cherche à estimer la fréquence locale<sup>1</sup>.

L'expression dans le domaine fréquentiel d'un filtre log-normal  $R_{\xi_i}$  (où  $\xi_i$  est la fréquence centrale du filtre) est donnée par l'équation (6.1) [Knutsson *et al.*, 1994].

$$R_{\xi_i}(\xi) = e^{-C_B \ln^2(\xi/\xi_i)} \quad (6.1)$$

avec  $\xi$  représentant la variable fréquence et  $C_B = \frac{4}{B^2 \ln(2)}$  où  $B$  est la bande passante à  $-6$  dB du filtre.

Considérons deux filtres  $R_{\xi_i}$  et  $R_{\xi_j}$ , avec deux fréquences centrales  $\xi_i$  et  $\xi_j$  différentes, l'équation (6.2) donne l'expression du rapport de ces deux filtres dans le domaine fréquentiel.

$$\frac{R_{\xi_j}(\xi)}{R_{\xi_i}(\xi)} = \left( \frac{\xi}{\sqrt{\xi_i \xi_j}} \right)^{2C_B \ln(\xi_j/\xi_i)} \quad (6.2)$$

---

<sup>1</sup>Il est possible de convertir des signaux réels en signaux analytiques à l'aide de la transformée de Hilbert qui ne garde que les fréquences positives d'un signal.

Si l'on pose  $2C_B \ln(\xi_j/\xi_i) = 1$ , nous obtenons alors  $\xi_j = \xi_i e^{\frac{1}{2C_B}}$ . Sous cette hypothèse, l'équation (6.2) prend la forme de l'équation (6.3).

$$\sqrt{\xi_j \xi_i} R_{\xi_j}(\xi) = \xi R_{\xi_i}(\xi) \quad (6.3)$$

Soit  $S(\xi)$  la transformée de Fourier d'un signal analytique  $s(t)$ , en multipliant les deux côtés de l'équation (6.3) par  $S(\xi)$ , on obtient l'équation (6.4).

$$\sqrt{\xi_j \xi_i} R_{\xi_j}(\xi) S(\xi) = \xi R_{\xi_i}(\xi) S(\xi) \quad (6.4)$$

La relation (6.5) donne une propriété de la transformée de Fourier appliquée à un signal  $u(t)$  dont la transformée de Fourier est  $U(\xi)$ .

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\partial}{\partial t} u(t)\right\}(\xi) = i2\pi\xi U(\xi) \quad (6.5)$$

En utilisant cette propriété et en appliquant la transformée de Fourier inverse à la relation (6.4), nous obtenons l'équation (6.6).

$$i2\pi\sqrt{\xi_j \xi_i} (r_{\xi_j} * s) = \frac{\partial}{\partial t} (r_{\xi_i} * s) \quad (6.6)$$

La fréquence instantanée  $\xi_l$  d'un signal localement monochromatique est définie comme la dérivée de sa phase (équation (6.7)) [Ville, 1948, Boashash, 1992a, Boashash, 1992b].

$$\xi_l = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \arg(s) \quad (6.7)$$

L'opération de filtrage par un filtre  $r_{\xi_i}$  ne modifie pas la dérivée de la phase du signal si  $s$  est un signal stationnaire monofréquentiel<sup>2</sup>, on peut donc réécrire l'équation (6.7) sous la forme de l'équation (6.9).

$$\xi_l = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \arg(r_{\xi_i} * s) \quad (6.8)$$

$$\xi_l = \frac{1}{2\pi} \Im \left[ \frac{\frac{\partial}{\partial t} (r_{\xi_i} * s)}{r_{\xi_i} * s} \right] \quad (6.9)$$

En utilisant la propriété (6.6), l'équation (6.9) prend la forme de l'équation (6.10).

$$\xi_l = \sqrt{\xi_i \xi_j} \Re \left[ \frac{r_{\xi_j} * s}{r_{\xi_i} * s} \right] \quad (6.10)$$

---

<sup>2</sup>Cependant si le signal présente une discontinuité, l'estimation de la fréquence locale sera lissée par l'application du filtre créant ainsi une erreur d'estimation pendant un temps correspondant à la réponse impulsionnelle du filtre.

Nous obtenons donc une estimation locale de la fréquence comme étant le rapport entre deux filtres log-normaux liés par la propriété  $\xi_j = \xi_i e^{\frac{1}{2C_B}}$ .

Pour un signal stationnaire monofréquentiel, l'application de l'équation 6.10 conduira à une estimation exacte. Cela ne sera plus vrai dans les cas plus complexes mais la méthode restera cependant utilisable.

La figure 6.1 montre un exemple de traitement d'un signal 1D localement monochromatique à l'aide de la méthode de rapport de filtres log-normaux en ne considérant, à ce niveau, qu'une paire de filtres. On constate que cette technique permet une estimation précise de la fréquence locale. Comme on pouvait s'y attendre, on constate un temps de réponse non nul au niveau de la transition et des bords du signal.

La figure 6.2 illustre l'effet de filtres mal adaptés au signal dans le cas où ce signal est entaché d'un bruit. On constate que lorsque la fréquence centrale d'un filtre est mal réglée, la puissance de sortie de ce filtre est de l'ordre du bruit pour les fréquences utiles. Ce qui induit une mauvaise estimation de la fréquence locale par la paire de filtres utilisée.

L'estimation de la fréquence a été réalisée à l'aide d'une paire de filtres. L'estimation ne peut donc se faire correctement que si le spectre du signal est dans la bande passante des filtres utilisés. Nous allons voir dans le paragraphe suivant, comment il est possible d'utiliser plusieurs paires de filtres pour estimer la fréquence locale de signaux à plus large bande.

## 6.2.2 Estimation large bande

Pour des signaux couvrant une plus large bande fréquentielle, deux solutions sont possibles. La première consiste à régler la bande passante des filtres de façon à ce que ces derniers englobent l'ensemble de la bande passante du signal.

Si l'on considère un signal bruité large bande, les filtres estimateurs devront couvrir la bande spectrale du signal analysé. L'augmentation de la bande passante des filtres estimateurs implique une plus grande sensibilité au bruit. De plus, si  $\xi_j$  et  $\xi_i$  sont choisis de façon à encadrer les fréquences présentes dans le signal analysé, la condition  $2C_B \ln(\xi_j/\xi_i) = 1$  impose la valeur du paramètre  $C_B$  ne laissant à l'utilisateur aucune latitude pour le réglage des filtres.

La seconde solution consiste à combiner plusieurs paires de filtres à l'aide d'une moyenne pondérée (équation (6.11)). L'utilisation de l'hypothèse reliant deux filtres consécutifs  $\xi_{i+1} = \xi_i e^{\frac{1}{2C_B}}$  permet de construire itérativement une suite de fréquences centrales  $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

$$\xi_l = \Re \left[ \left[ \sum_{i=1}^{N-1} c_i \right]^{-1} \sum_{i=1}^{N-1} c_i \sqrt{\xi_i \xi_{i+1}} \frac{s * r_{\xi_{i+1}}}{s * r_{\xi_i}} \right] \quad (6.11)$$

où  $c_i$  sont les coefficients de pondération de la moyenne et  $N$  le nombre de filtres utilisés.

La problématique devient donc le choix des coefficients  $c_i$ . Dans le cas où les coefficients sont identiques  $c_i = 1$ , toutes les paires de filtres ont la même importance dans l'estimation finale de la fréquence. Ce n'est pas souhaitable car la contribution d'un filtre faisant son

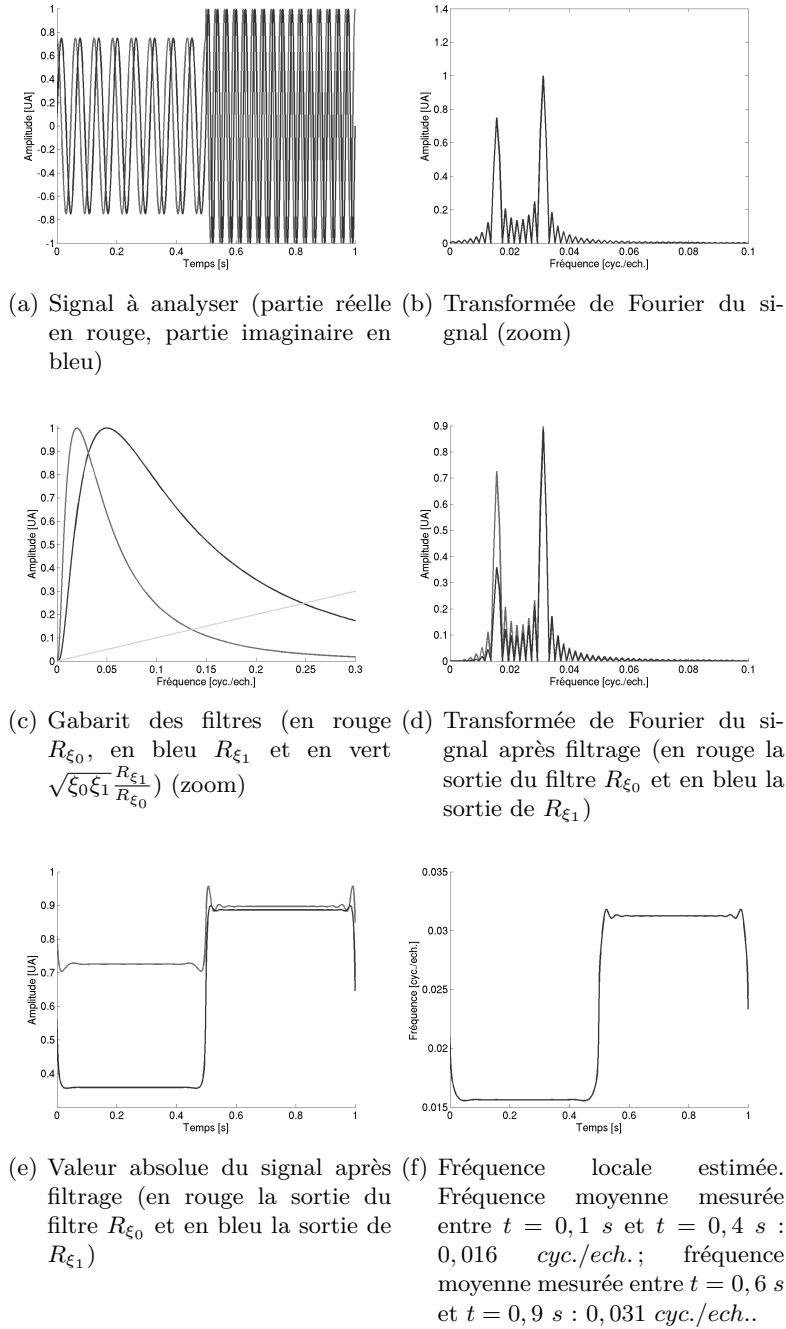
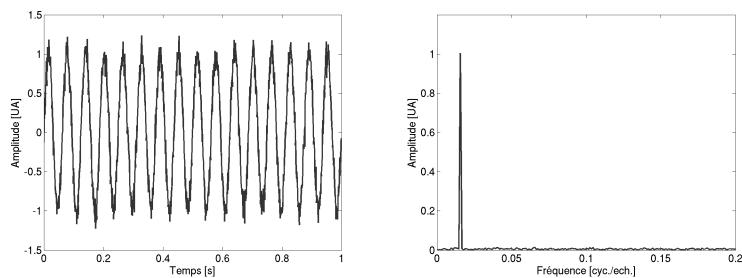
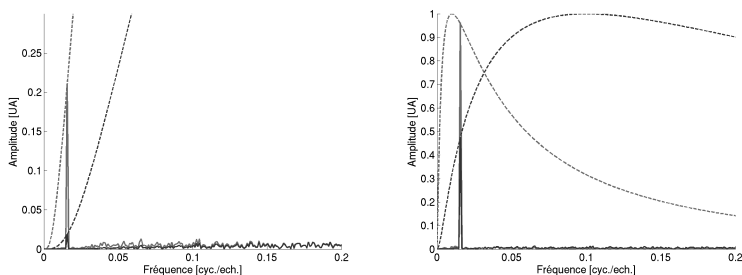


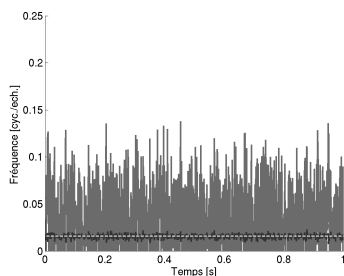
FIG. 6.1: Exemple d'application de la méthode proposée par H. Knutsson et *al.* avec une seule paire de filtres. Le signal à analyser a une fréquence de  $f = 0,016$  cyc./ech. avec une amplitude de  $0,75$  pour  $t \in [0, 0,5[$  s et une fréquence de  $f = 0,031$  cyc./ech. avec une amplitude de  $1$  pour  $t \in [0,5$  1[ s. Les fréquences sont données en fréquences normalisées (entre 0 et 1). Les deux filtres  $R_{\xi_0}$  et  $R_{\xi_1}$  ont respectivement une fréquence centrale de  $0,02$  cyc./ech. et  $0,05$  cyc./ech. (soit  $C_B = 0,546$ ). Les amplitudes sont données en unité arbitraire (UA).



(a) Partie réelle du signal bruité à analyser (b) Transformée de Fourier du signal (zoom)



(c) Transformée de Fourier du signal après filtrage par une paire de filtres non adaptée au signal (en trait plein) ainsi que les gabarits des filtres (en pointillé). Zoom (d) Transformée de Fourier du signal après filtrage par une paire de filtres adaptée au signal (en trait plein) ainsi que les gabarits des filtres (en pointillé). Zoom



(e) Fréquence locale estimée par la paire de filtres non adaptée (en rouge) et une paire de filtres adaptée (en bleu). La valeur théorique est représentée en pointillé vert.

FIG. 6.2: Exemple d'application de la méthode proposée par H. Knutsson *et al.* avec deux paires de filtres l'une adaptée et l'autre mal adaptée sur un signal bruité. Le signal à analyser a une fréquence de  $f = 0,015 \text{ cyc./ech.}$  sur toute la durée de l'acquisition et un SNR de  $20 \text{ dB}$ . Les deux filtres  $R_{\xi_0}$  et  $R_{\xi_1}$  ont respectivement pour fréquences centrales :  $0,1 \text{ cyc./ech.}$  et  $0,3 \text{ cyc./ech.}$  (soit  $C_B = 0,455$ ) pour la paire de filtre mal adaptée et  $0,01 \text{ cyc./ech.}$  et  $0,1 \text{ cyc./ech.}$  (soit  $C_B = 0,2171$ ) pour les deux filtres bien choisis. Le zoom sur le graphique (c) met en valeur le fait que la puissance de la fréquence utile filtrée par le filtre représenté par la courbe bleue est du même ordre de grandeur que le bruit, impliquant une mauvaise estimation de la fréquence utile. La valeur moyenne de la valeur absolue de l'erreur est  $MAE = 0,0019 \text{ cyc./ech.}$  pour la paire de filtres bien choisie et  $MAE = 0,058 \text{ cyc./ech.}$  pour la paire de filtres mal adaptée.

estimation sur une bande de fréquence ne comportant que du bruit sera la même qu'une paire de filtres estimant la bande de fréquence du signal utile.

Une solution intéressante est de considérer que le poids d'une paire de filtres soit lié à la puissance de sortie du filtrage. Ainsi une paire de filtres ayant une forte puissance de sortie aura une contribution plus importante qu'une paire de filtres ayant peu de puissance (et donc estimant un signal faible comme du bruit). Une solution remplissant cette condition est de poser  $c_i = s * r_{\xi_i}$ . Ainsi l'équation (6.11) se simplifie en l'équation (6.12).

$$\xi_l = \Re \left[ \left[ \sum_{i=1}^{N-1} s * r_{\xi_i} \right]^{-1} \sum_{i=1}^{N-1} \sqrt{\xi_i \xi_{i+1}} s * r_{\xi_{i+1}} \right] \quad (6.12)$$

### 6.2.3 Variance du spectre

Un signal mesuré n'est pas nécessairement purement monochromatique. En effet, un bruit peut entacher le signal et entraîner une erreur d'estimation. De même, si le signal mesuré présente des sauts de fréquences, la réponse impulsionnelle des filtres servant à l'estimation va impliquer un temps de réponse dans l'estimation locale de fréquence. Dans ces conditions, il est alors nécessaire de définir un indicateur de qualité de l'estimation.

On définit un estimateur de qualité comme étant la somme quadratique de la différence entre la valeur estimée par chaque paire de filtres et la fréquence instantanée mesurée. Il s'agit d'une variance locale. Cet estimateur peut être aussi interprété comme la bande passante instantanée [Boashash, 1992a]. Ainsi, plus la bande passante locale sera grande et plus incertaine sera l'estimation. L'équation (6.13) donne l'expression de la variance locale dans le cas  $c_i = s * r_{\xi_i}$ .

$$\sigma_l^2 = \Re \left[ \left[ \sum_{i=1}^{N-1} (s * r_{\xi_i})^2 \right]^{-1} \sum_{i=1}^{N-1} (s * r_{\xi_i})^2 \left( \sqrt{\xi_i \xi_{i+1}} \frac{s * r_{\xi_{i+1}}}{s * r_{\xi_i}} - \xi_l \right)^2 \right] \quad (6.13)$$

Une mesure de la confiance locale  $c_l$  peut être définie comme l'inverse de la variance (équation (6.14)) [Knutsson *et al.*, 1994].

$$c_l = \frac{1}{1 + \sigma_l^2} \quad (6.14)$$

Cet indice de confiance locale tend vers 0 lorsque la variance locale tend vers l'infini et donc que l'estimation locale de fréquence est très incertaine. Il tend vers 1 lorsque la variance locale tend vers 0 et donc que l'estimation locale de fréquence est bonne.

La figure 6.3 donne un exemple de reconstruction de la fréquence locale d'un signal à l'aide de plusieurs filtres ainsi que l'estimation de la confiance locale. On constate que la confiance diminue au niveau des transitions.

La généralisation de cette technique à plusieurs dimensions se fait en utilisant la propriété de séparabilité de l'analyse fréquentielle, c'est-à-dire que l'on peut analyser l'onde de cisaillement dans chacune des directions de l'espace indépendamment. Un vecteur de

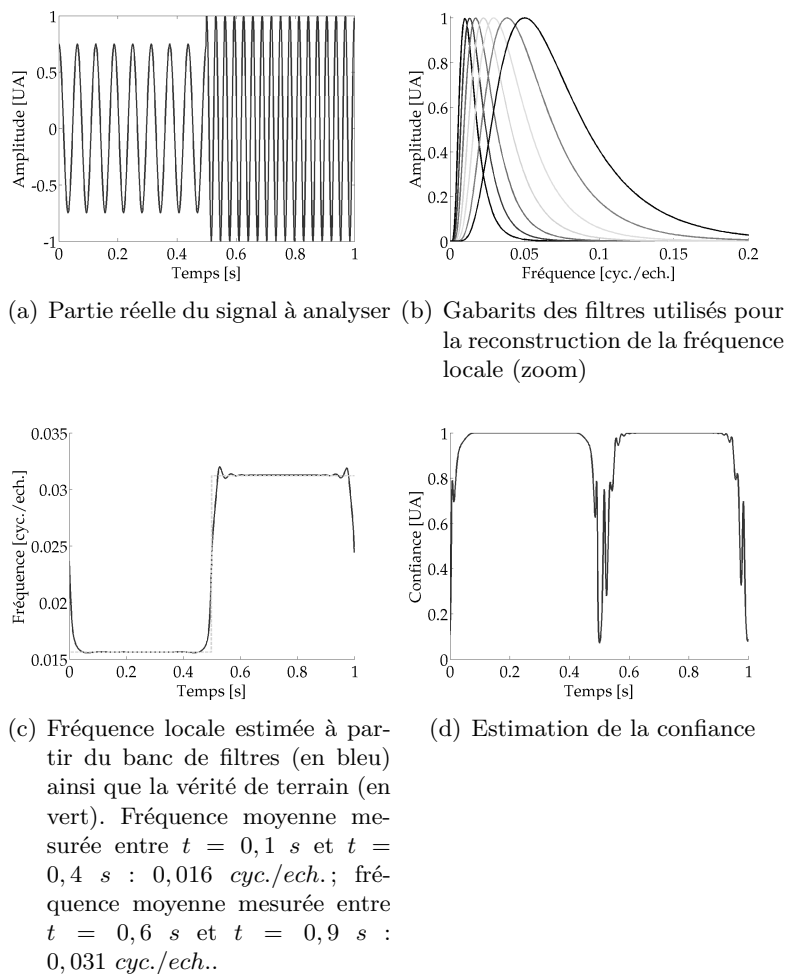


FIG. 6.3: Exemple d'application de la méthode proposée par H. Knutsson avec un banc de 6 filtres. Le signal à analyser a une fréquence de  $f = 0,016$  *cyc./ech.* avec une amplitude de  $0,75$  pour  $t \in [0,0,5[$  s et une fréquence de  $f = 0,031$  *cyc./ech.* avec une amplitude de  $1$  pour  $t \in [0,5,1[$  s. Les fréquences sont données en fréquences normalisées (entre 0 et 1). La fréquence centrale minimale des filtres est de  $0,01$  *cyc./ech.* et la fréquence centrale maximale est de  $0,05$  *cyc./ech.* (soit  $C_B = 1,864$ ).